
Mécanique analytique, Corrigé 12

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Deux masses et un ressort

- a) En notant x_1 la position de la particule de masse m_1 et x_2 celle de masse m_2 , le lagrangien du système s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(L - |x_2 - x_1|)^2. \quad (1)$$

Il faut bien prendre en compte les deux positions car aucune contrainte n'impose la position absolue de la première masse ou sa position par rapport à la seconde masse ; on cherche justement cette dépendance.

- b) Le lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne

$$h(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}) = T + V \quad (2)$$

est conservée et correspond à l'énergie mécanique du système.

La seconde quantité conservée est l'impulsion totale $P = p_1 + p_2 = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$. On peut observer que rien ne contraint le système total à un mouvement particulier selon l'axe x , donc qu'aucune force ne s'applique sur le centre de masse de ce système ; d'après les équations de Newton, la quantité de mouvement totale sera donc conservée. Nous pouvons vérifier la conservation de l'impulsion totale $P = p_1 + p_2$ par le calcul suivant. Notant que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}_i = m_i\dot{x}_i = p_i$, on a

$$\frac{dP}{dt} = m_1 \frac{d}{dt}\dot{x}_1 + m_2 \frac{d}{dt}\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \quad (3)$$

Ici, nous avons utilisé les équations d'Euler-Lagrange et le fait que $V(x_1 < x_2) = \frac{1}{2}k(L - (x_2 - x_1))^2$ et $V(x_1 > x_2) = \frac{1}{2}k(L - (x_1 - x_2))^2$, d'où la dernière égalité.

La conservation de la quantité de mouvement est la conséquence du théorème de Noether et correspond à la symétrie de translation du système. En effet, le lagrangien est invariant sous la transformation $x_i \rightarrow x_i(s) = x_i + s$ où s est une constante. La constante de Noether associée est

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i} \frac{\partial x_i(s)}{\partial s} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = p_1 + p_2, \quad (4)$$

qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement totale du système.

- c) Il est clair que les positions d'équilibre seront les positions pour lesquelles les deux masses sont séparées de L . Voyons-le explicitement. Pour trouver les positions d'équilibre du système, on doit annuler la première dérivée du potentiel :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = k(L - |x_2^* - x_1^*|) \frac{x_1^* - x_2^*}{|x_2^* - x_1^*|} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = -k(L - |x_2^* - x_1^*|) \frac{x_1^* - x_2^*}{|x_2^* - x_1^*|} = 0. \quad (6)$$

On constate bien que les positions d'équilibre se trouvent pour $x_2^* - x_1^* = \pm L$. Choisissons de décrire les oscillations de la position d'équilibre caractérisée par $x_2^* - x_1^* = +L$. Dans ce cas, en notant $x_i = x_i^* + \delta_i$, le potentiel s'écrit

$$V(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2}k(L - |x_2^* - x_1^* + \delta_2 - \delta_1|)^2 = \frac{1}{2}k(L - |L + \delta_2 - \delta_1|)^2 = \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_1)^2. \quad (7)$$

La dernière égalité n'est valable que si l'on fait l'hypothèse que $L + \delta_2 - \delta_1 > 0$. Le lagrangien décrivant les petites oscillations autour de la position d'équilibre choisie s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\delta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_1)^2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\delta}}^T M \dot{\boldsymbol{\delta}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T K \boldsymbol{\delta}, \quad (8)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

À ce stade, nous avons un lagrangien qui correspond à deux oscillateurs harmoniques couplés, puisque nous nous sommes restreints à des oscillations autour d'une position d'équilibre en excluant la possibilité que les deux masses s'échangent de position. On a également fait attention à ce que les matrices M et K soient symétriques, définies positives (sinon la méthode de résolution ne marche pas, et il sera impossible de découpler ces deux oscillateurs); en particulier, alors que l'on aurait pu écrire K sous la forme

$$K' = k \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{non symétrique}], \quad (10)$$

on choisit la forme donnée à l'équation (9) pour obtenir une matrice K symétrique. Notez enfin que ce lagrangien est exprimé en fonction des coordonnées perturbées δ_i .

- d) On désire à présent choisir une nouvelle base, \vec{Q} , dans laquelle le lagrangien sera celui de deux oscillateurs harmoniques découplés :

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^T \dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2}\vec{Q}^T \Omega \vec{Q}, \quad (11)$$

où $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$ est une matrice diagonale à déterminer. Les modes propres d'oscillations seront l'expression de ces nouveaux vecteurs de base en fonction des anciens.

Afin de trouver cette nouvelle base, posons le changement de variable $\vec{\delta} = \Delta \vec{Q}$, où Δ est une matrice que l'on déterminera ci-dessous. On voit que pour passer de (8) à (52), la matrice de changement de base Δ doit satisfaire deux conditions :

$$\Delta^T M \Delta = \mathbb{1}, \quad (12)$$

$$\Delta^T K \Delta = \Omega. \quad (13)$$

Il s'agit là d'un problème aux valeurs propres généralisé, du type $Kx = \omega^2 Mx$. Puisque M est symétrique définie positive, on obtient de (53) que $\Delta^T = \Delta^{-1} M^{-1}$. En insérant cette expression dans (54), on obtient une condition plus familière

$$\Delta^{-1} (M^{-1} K) \Delta = \Omega. \quad (14)$$

Nous devons donc diagonaliser la matrice $M^{-1} K$ pour trouver cette nouvelle base. Les matrices de masse et d'interaction de ce système sont données dans l'équation (9) ; on a donc

$$M^{-1} K = \frac{k}{m_1 m_2} \begin{pmatrix} m_2 & -m_2 \\ -m_1 & m_1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Les valeurs propres et vecteurs propres correspondants sont donnés par

$$\omega_0^2 = 0, \quad \vec{A}_0 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu}, \quad \vec{A}_\mu \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -m_1/m_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

où μ est la masse réduite définie par

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (17)$$

La normalisation des vecteurs propres est fixée par la condition de M -orthogonalité $(\vec{A}_i)^T M \vec{A}_i = 1$. On obtient alors

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_\mu = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_2/m_1} \\ -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

La matrice de changement de base Δ permettant l'expression de $\vec{\delta}$ en fonction des coordonnées normales selon $\vec{\delta} = \Delta \vec{Q}$ est donc donnée par

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m_2/m_1} \\ 1 & -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

En utilisant $\Delta^T M \vec{\delta} = \vec{Q}$, on trouve l'expression explicite des coordonnées normales :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 \\ \sqrt{m_1 m_2} (\delta_1 - \delta_2) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

e) Le lagrangien décrivant les petites oscillations s'écrit donc en fonction des coordonnées normales comme

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_\mu^2 Q_2^2 \right). \quad (21)$$

La conservation de la quantité de mouvement s'exprime dans ces coordonnées par le fait que Q_1 est une variable cyclique, donc \dot{Q}_1 est conservée. D'après l'équation (20), on a $Q_1 \propto m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2$ et l'on retrouve la conservation de la quantité de mouvement totale.

On voit ici que la description en termes de coordonnées normales permet de décomposer le mouvement total en deux mouvements découplés : un mouvement de translation rectiligne uniforme du centre de masse décrit par $Q_1 = 0$ (le système est isolé) et une oscillation relative de m_1 et m_2 décrite par la coordonnée $Q_2 \propto \delta_1 - \delta_2$.

- f) La description que l'on a faite n'est pas en mesure de décrire le croisement des masses m_1 et m_2 . Cette description est donc valide pour des oscillations ayant une amplitude assez faible pour que les masses ne se croisent pas.
- g) Dans le cas $m_2 \gg m_1$, la situation est la même que si m_2 était fixée et l'on s'attend donc simplement à trouver un mouvement harmonique pour m_1 . En effet, la pulsation et les vecteurs propres ont les limites suivantes :

$$\omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu} = \frac{k}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{k}{m_1}, \quad \vec{A}_\mu \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{1}{\sqrt{m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Complément Aux questions d) et e), il est possible de suivre une approche alternative, qui attribue un rôle plus symétrique à la matrice de masse M . Le changement de base des coordonnées généralisées $\vec{\delta}$ décrivant les petites oscillations vers les coordonnées normales (décrivant ces mêmes petites oscillations) se fait alors conceptuellement en deux étapes. Un premier changement de base

$$\vec{y} = M^{1/2} \vec{\delta} \quad (23)$$

$$\vec{\delta} = M^{-1/2} \vec{y} \quad (24)$$

est introduit pour absorber l'effet de la matrice de masse M .

Rappel : racine d'une matrice définie positive

On rappelle que la (une) racine de M (symétrique et définie positive) s'obtient par la diagonalisation

$$M = PDP^{-1} = PDP^T, \quad (25)$$

où P est une matrice orthogonale ($PP^T = \mathbb{1} = P^T P$, $P^{-1} = P^T$) et la matrice diagonale D s'écrit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_n > 0$ puisque M est supposée définie positive; on peut alors poser

$$M^{1/2} = PD^{1/2}P^{-1} = PD^{1/2}P^T, \quad (26)$$

avec $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$, et cette matrice vérifie bien $(M^{1/2})^2 = \mathbb{1}$.

Dans le cas particulier du présent exercice, la diagonalisation n'est pas nécessaire car M est déjà sous forme diagonale, et l'on obtient immédiatement

$$M^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}). \quad (27)$$

Comme $M^{1/2}$ est indépendante du temps et symétrique (ce qui se vérifie facilement sur la base de l'encadré ci-dessus), le lagrangien (8) se réécrit en effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{osc}} &= \frac{1}{2} \dot{\delta}^T M^{1/2} M^{1/2} \dot{\delta} - \frac{1}{2} \delta^T K \delta \\ &= \frac{1}{2} (M^{1/2} \dot{\delta})^T M^{1/2} \dot{\delta} - \frac{1}{2} \delta^T K \delta \\ &= \frac{1}{2} \dot{y}^T \dot{y} - \frac{1}{2} y^T M^{-1/2} K M^{-1/2} y = \frac{1}{2} \dot{y}^T \dot{y} - \frac{1}{2} y^T \tilde{K} y, \end{aligned} \quad (28)$$

avec

$$\tilde{K} = M^{-1/2} K M^{-1/2}. \quad (29)$$

Cette matrice \tilde{K} , réelle et symétrique, est diagonalisable par une transformation orthogonale U ($UU^T = \mathbb{1} = U^T U$) qui fournit le second changement de base recherché :

$$Q = U^{-1} y = U^T y, \quad (30)$$

$$\mathbf{y} = U\mathbf{Q}. \quad (31)$$

La matrice U est construite dans la diagonalisation

$$\tilde{K} = U\Omega U^{-1} = U\Omega U^T, \quad (32)$$

$$\Omega = U^{-1}\tilde{K}U = U^T\tilde{K}U, \quad (33)$$

où Ω est une matrice diagonale. Comme \tilde{K} est définie positive (ou semi-définie positive), ses valeurs propres sont strictement positives ou nulles, et l'on écrit $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$, où $\omega_i \in \mathbb{R}$. Au terme de cette seconde étape, on peut donc réécrire le lagrangien sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{osc}} &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}^T U U^T \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\mathbf{y}^T U \Omega U^T \mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}^T \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q} = \sum_i \left(\frac{1}{2}\dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2 Q_i^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

En fin de compte, on a effectué le changement de base orthogonal

$$\mathbf{Q} = (U^{-1}M^{1/2})\boldsymbol{\delta}, \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\delta} = (M^{-1/2}U)\mathbf{Q}. \quad (36)$$

En introduisant $\Delta = M^{-1/2}U$, on vérifie que le travail de diagonalisation présenté à l'équation (55), à savoir $\Omega = \Delta^{-1}(M^{-1}K)\Delta = U^{-1}M^{1/2}M^{-1}KM^{-1/2}U = U^{-1}(M^{-1/2}KM^{-1/2})U$, est bien équivalent au travail de diagonalisation $\Omega = U^{-1}\tilde{K}U$ de l'équation (33), et qu'il est simplement effectué en partant d'une autre base. La méthode présentée dans ce complément fait simplement intervenir de façon plus symétrique dans la réécriture du lagrangien et dans la matrice à diagonaliser. Bien que cette présentation symétrique soit plus élégante, il convient de retenir la méthode qui, à vos yeux, est la plus simple à retenir, ou celle qui simplifie au maximum les calculs. Avec cette seconde méthode et dans le cadre du présent exercice, il s'agit de diagonaliser

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\tilde{K} = k \begin{pmatrix} 1/m_1 & -1/\sqrt{m_1 m_2} \\ -1/\sqrt{m_1 m_2} & 1/m_2 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Le polynôme caractéristique de \tilde{K} est $P_{\tilde{K}}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda k/\mu$, où $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$, ce qui fournit les valeurs propres $\lambda_0 = \omega_0^2 = 0$ et $\lambda_\mu = \omega_\mu^2 = k/\mu$ comme précédemment. On trouve aussi facilement les vecteurs propres normés associés :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mu/m_2} \\ \sqrt{\mu/m_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\mu/m_1} \\ -\sqrt{\mu/m_2} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

d'où la matrice de changement de base

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu/m_2} & \sqrt{\mu/m_1} \\ \sqrt{\mu/m_1} & -\sqrt{\mu/m_2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

On retrouve ainsi aussi

$$\Delta = M^{-1/2}U = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu/(m_1 m_2)} & \sqrt{\mu/m_1^2} \\ \sqrt{\mu/(m_1 m_2)} & -\sqrt{\mu/m_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m_2/m_1} \\ 1 & -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Exercice 2 : Trois masses et deux ressorts

- a) Les coordonnées généralisées sont les positions des trois masses sur l'axe x : respectivement x_1 , x_2 et x_3 . Le lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(L_1 - |x_1 - x_2|)^2 - \frac{1}{2}k(L_2 - |x_2 - x_3|)^2. \quad (42)$$

- b) Le lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne $h = T + V$ correspondant à l'énergie mécanique est conservée. La seconde quantité conservée est l'impulsion totale du système, conséquence de l'invariance sous translation du système. Le lagrangien est en effet invariant sous la transformation $x_i \rightarrow x_i(s) = x_i + s$ où s est une constante. La quantité conservée correspondante est donnée par

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i(s)}{\partial s} = m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) + m_2\dot{x}_2 = \sum_{i=1}^3 p_i, \quad (43)$$

qui n'est autre que la quantité de mouvement totale du système.

- c) Afin de trouver les positions d'équilibres nous devons minimiser le potentiel par rapport aux trois positions :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (44)$$

La solution de ce système est bien entendu donnée par $x_1^* - x_2^* = \pm L_1$ et $x_2^* - x_3^* = \pm L_2$. Choisissons maintenant δ_i comme étant la déviation de l'équilibre de la masse i : $x_i = x_i^* + \delta_i$. Dans l'approximation de petits déplacements ($|\delta_1 - \delta_2|/L_1 \ll 1$ et $|\delta_2 - \delta_3|/L_2 \ll 1$), on peut développer le potentiel au deuxième ordre dans les δ_i et l'on trouve aisément :

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m_1(\dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_3^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{\delta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\delta_1 - \delta_2)^2 - \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_3)^2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\delta}}^T M \dot{\boldsymbol{\delta}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T K \boldsymbol{\delta}. \quad (45)$$

où les matrices M et K sont données par :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

- d) Afin de trouver les modes d'oscillation, nous devons diagonaliser la matrice $M^{-1}K$:

$$M^{-1}K = k \begin{pmatrix} 1/m_1 & -1/m_1 & 0 \\ -1/m_2 & 2/m_2 & -1/m_2 \\ 0 & -1/m_1 & 1/m_1 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

dont le polynôme caractéristique est $(\lambda k/m_1 - \lambda)(\lambda - k/m_1 - 2k/m_2)$ et les valeurs propres sont donc $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = k/m_1$ et $\omega_3^2 = k/\mu$ où $\mu = m_1 m_2 / (2m_1 + m_2)$. Les vecteurs propres associés sont donnés par

$$\vec{A}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Leur normalisation est imposée par la relation $\vec{A}_i^T M \vec{A}_i = 1$. On trouve alors :

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m_1(1 + 2m_1/m_2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

- e) Afin de réécrire le lagrangien en termes de coordonnées normales, nous devons faire le changement de variable suivant : $\boldsymbol{\delta} = \Delta \mathbf{Q}$ où Δ est la matrice de changement de base dont les colonnes sont \vec{A}_1 , \vec{A}_2 et \vec{A}_3 . On trouve alors

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \dot{Q}_i^2 - \omega_2^2 Q_2^2 - \omega_3^2 Q_3^2 \right). \quad (50)$$

La conservation de la quantité de mouvement est maintenant traduite par le fait que Q_1 est cyclique et donc que \dot{Q}_1 est conservée. En effet, comme $\Delta^T M \boldsymbol{\delta} = \mathbf{Q}$ on trouve $\dot{Q}_1 \propto m_1(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + m_2 \dot{\delta}_2$.

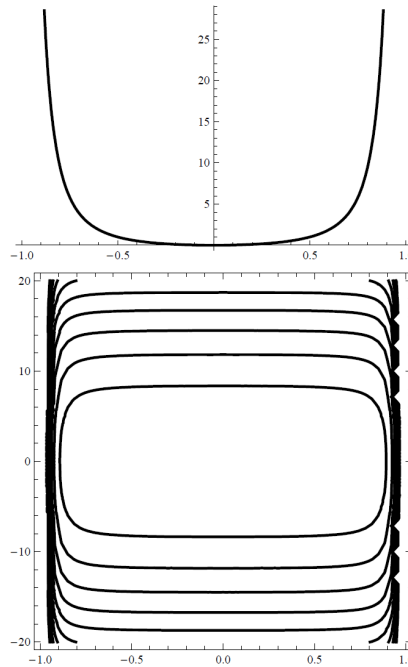
- f) Comme auparavant, la description que nous avons faite se limite au cas où les masses ne se croisent pas.
- g) La situation où $m_2 \gg m_1$ correspond à fixer la masse m_2 . ω_2 et \vec{A}_2 sont indépendants de m_2 , seule ω_3 est affectée :

$$\omega_3^2 = \frac{k}{\mu} \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{k}{m_1}, \quad \vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m_1(1 + 2m_1/m_2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

On retrouve donc bien le mode optique (\vec{A}_2) et le mode acoustique (\vec{A}_3), comme on pouvait s'y attendre!

Exercice 3 : Particule oscillante

- a) Le potentiel, ainsi que le portrait de phase ($a = V_0 = 1$) sont



- b) Le minimum se trouve en $x = 0$. Pour trouver les petites oscillations on peut simplement utiliser les développements bien connus des fonctions trigonométriques ($\cos x \simeq 1$, $\sin x \simeq x$) :

$$V(x)|_{x \simeq 0} = \frac{V_0 \pi^2}{4a^2} x^2. \quad (52)$$

et donc la fréquence d'oscillation est donnée par :

$$\omega^2 = \frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}. \quad (53)$$

- c) L'équation de Hamilton–Jacobi dans le cas indépendant du temps est ici donnée par :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi x}{2a} \right) = E. \quad (54)$$

d'où l'on tire la solution générale :

$$W_{\pm}(x, E) = \pm \int_0^x d\tilde{x} \sqrt{2m \left[E - V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) \right]}. \quad (55)$$

- d) Afin de définir l'orbite, il faut trouver les points de rebroussement. Ils sont donnés par $H(p = 0, \pm \bar{x}) = E$:

$$\bar{x} = \frac{2a}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{E}{V_0}} \right). \quad (56)$$

Pour l'action on trouve alors :

$$I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\bar{x}}^{+\bar{x}} d\tilde{x} \sqrt{2m \left[E - V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) \right]} - \int_{+\bar{x}}^{-\bar{x}} d\tilde{x} \sqrt{2m \left[E - V_0 \tan^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) \right]} \right\}. \quad (57)$$

Avec le changement de variable $\tan \left(\frac{\pi \tilde{x}}{2a} \right) = \sqrt{\frac{E}{V_0}} z$, on tombe sur la forme canonique donnée dans la série :

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+\alpha z^2} dz = \frac{\pi}{\alpha} (\sqrt{\alpha+1} - 1). \quad (58)$$

avec $\alpha = E/V_0$. Et donc, au final :

$$I = \frac{2a}{\pi} \sqrt{2m} (\sqrt{E+V_0} - \sqrt{V_0}). \quad (59)$$

- e) En inversant la relation ci-dessus on trouve $E = E(I)$:

$$E = \sqrt{\frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}} I + \frac{\pi^2}{8ma^2} I^2. \quad (60)$$

La fréquence du mouvement est donc donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}} + \frac{\pi^2}{4ma^2} I. \quad (61)$$

f) Les petites oscillations correspondent au cas $E \ll V_0$. En effet, dans cette limite $I \simeq 0$ et donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{V_0 \pi^2}{2ma^2}}, \quad (62)$$

qui est bien le même résultat que celui trouvé plus haut.

g) Dans la limite inverse $E \gg V_0$ on s'attend à ne pas « voir » les détails du bas du potentiel. C'est en effet le cas :

$$I \simeq \frac{2a}{\pi} \sqrt{2mE}. \quad (63)$$

et donc :

$$\omega = 2\pi \frac{\sqrt{2E/m}}{4a} = 2\pi \frac{\text{vitesse}}{\text{distance}}. \quad (64)$$

ce qui correspond à une particule libre qui rebondit sur des murs distants de $2a$.